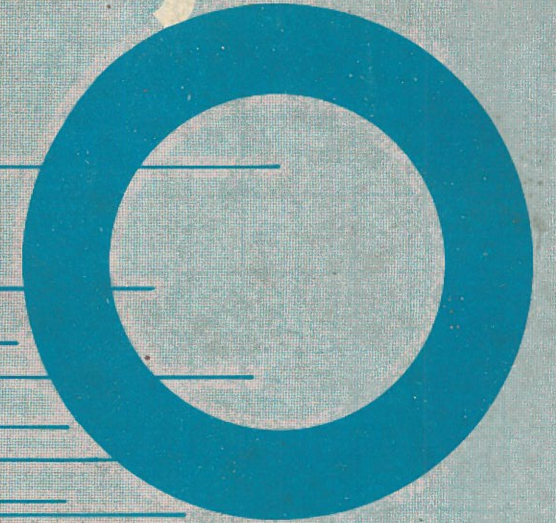


जगदीश क़ाबरे हे पेशाने विज्ञानशिक्षक असून मुलांमध्ये वैज्ञानिक दृष्टीकोन रूजवण्यासाठी प्रयत्नशील असतात. त्यांना 'आदर्श शिक्षक' म्हणून विविध संस्थातर्फे बहुमानित केले गेले आहे. ते खगोल मंडळाचे अध्यक्ष होते. 'नवी मुंबई' पाक्षिकाचे गेली सहा वर्षे संपादक होते. लोकविज्ञान, अंधश्रद्धा निर्मूलन आणि ग्रंथाली या चळवळीतून ते क्रियाशील कार्य करीत असतात. दूरदर्शन, आकाशवाणी या माध्यमातून त्यांचे कार्यक्रम होत असतात. 'नवशक्ति', 'मुंबई सकाळ'या वर्तमानपत्रातील त्यांची विज्ञान सदरे लोकप्रिय आहेत. कार्यकर्ते घडविणे हे त्यांच्या आयुष्याचे उद्दीष्ट आहे.



१२३४५६७८९



शून्याचा प्रवास

जगदीश काबरे

जगातील काही महत्त्वाच्या अंकलेखनपद्धती

आधुनिक मराठी	ईजिप्त हायरोग्लिफिक	ईजिप्त हिअरेटिक	बॅबिलोनिया	ग्रीक ॲटिक	ग्रीक आयोनियन	चिनी दंड	चिनी चिन्हांकित	रोमन	हिब्रू	माया	अरबी अक्षरांकित	अरबी गुबार	अरबी आधुनिक	आधुनिक पाश्चिमात्य
१	|	|	Y	I	A	|	一	I	א	•	ا	[illegible]	١	1
२	||	||	YY	II	B	||	二	II	ב	••	ب	[illegible]	٢	2
३	|||	|||	YYY	III	Γ	|||	三	III	ג	•••	ج	[illegible]	٣	3
४	||||	[illegible]	YYYY	IIII	Δ	||||	四	IIII	ד	••••	د	[illegible]	٤	4
५	|||||	[illegible]	YYYYY	Γ	E	|||||	五	V	ה	—	ه	[illegible]	٥	5
६	||||||	[illegible]	YYYYYY	ΓI	F	⊤	六	VI	ו	•—	و	[illegible]	٦	6
७	|||||||	[illegible]	YYYYYYY	ΓII	Z	⊤|	七	VII	ז	••—	ز	[illegible]	٧	7
८	||||||||	[illegible]	YYYYYYYY	ΓIII	H	⊤||	八	VIII	ח	•••—	ح	[illegible]	٨	8
९	|||||||||	[illegible]	YYYYYYYYY	ΓIIII	Θ	⊤|||	九	IX	ט	••••—	ط	[illegible]	٩	9
१०	∩	[illegible]	<	Δ	I	—	十	X	י	=	ي	[illegible]	١٠	10
२०	∩∩	[illegible]	<<	ΔΔ	K	=	二十	XX	כ	[illegible]	ك	[illegible]	٢٠	20
३०	∩∩∩	[illegible]	<<<	ΔΔΔ	Λ	≡	三十	XXX	ל	[illegible]	ل	[illegible]	٣٠	30
४०	∩∩∩∩	[illegible]	<<<<	ΔΔΔΔ	M	[illegible]	四十	XL	מ	[illegible]	م	[illegible]	٤٠	40
५०	∩∩∩∩∩	[illegible]	<<<<<	[illegible]	N	[illegible]	五十	L	נ	[illegible]	ن	[illegible]	٥٠	50

शून्याचा प्रवास

जगदीश काबरे



प्रथम आवृत्ती
जानेवारी १९९१

किंमत : १२ रुपये

प्रकाशक
भास्कर काणेकर
चौफेर प्रकाशन
प्लॉट नं. ४६, सेक्टर-२३
तुर्भे, नवी मुंबई-४०० ७०५.

मुद्रक
भरत काते
सरस्वती प्रिंटर्स
४१५, क्रिएटिव्ह इंड. इस्टेट
मुंबई-४०० ०११.

लेझरसेटिंग
अक्षय फोटोटाइपसेटर्स
'कुलदीपक'
जुन्या महानगरपालिकेशेजारी
ठाणे-४०० ६०१.

मुखपृष्ठ
कमल शेडगे

आतील पृष्ठरचना
अक्षय फोटोटाइपसेटर्स, ठाणे.

माझ्यावर निर्भेळ प्रेमाचा वर्षाव करणारे
सुहास आणि ज्योती धामणकर यांना

जगदीश काबरे यांची इतर पुस्तके :

कथा ही रक्ताची (आवृत्ती संपली)
तुषार (आवृत्ती संपली)
विज्ञान खेळ
सत्यकथा
विज्ञान गोष्टी (भाग १, २, ३)
कालयंत्र
विज्ञान जगतात
विज्ञान कथा
विज्ञान कुतूहल
बळी अंधश्रद्धेचे
ज्योतिषशास्त्रावर प्रकाशझोत
अतूट नाते रक्ताचे
साधेच पण अद्‌भूत
अवकाशयात्री
विज्ञानाच्या परिसरात
विज्ञानाशी हितगुज

1 शून्याचा प्रवास

'गणित'हा शब्द उच्चारला की, आपल्यापैकी बऱ्याच जणांच्या कपाळावर आठ्यांचं जाळं उपटतं. 'कुणी शोधून काढला हा विषय ? नसती कटकट !' असं आपण त्रासिकपणं म्हणून जातो. गणिताशी असलेला आपला हा 36चा आकडा आजच्या शिक्षण पद्धतीतून निर्माण झालेला आहे. खरं तर गणित हा विषय खूपच मनोरंजक आहे. त्यानं वैचारिक खाद्य तर मिळतंच; पण अनेक गमतीही करता येतात. मनोरंजनाचं एक उत्तम साधन म्हणून गणित महत्त्वाचा वाटा उचलतं आणि जीवनातला व्यवहार गणितामुळंच कळतो. सारांश, गणित नसतं तर आजची प्रगती कधीच झाली नसती !

गणित हा शब्द गण् म्हणजे मोजणे ह्या मूळ संस्कृत शब्दापासून तयार झालेला आहे. याचा अर्थ गणित म्हणजे मोजमापाचे शास्त्र असा होतो. आपले विचार प्रकट करण्यासाठी आपण शब्दांचा आधार घेतो. तसंच मोजमाप करण्यासाठी चिन्हं, अक्षरं वा वस्तू यांचा आधार घ्यावा लागतो.

ज्या काळी माणूस भटकंती सोडून नदीच्या काठी शेती करू लागला, तेव्हा तो समूहानं जगत असताना काही वस्तूंची देवाणघेवाण करू लागला.



आकृती क्र. १

ही देवाणघेवाण करताना त्याला त्या वस्तूंची तुलना करणं आवश्यक वाटू लागलं. कारण त्यामागे नफ्यातोट्याचा विचार होता. या कामासाठी त्याला 'परिमाणा'ची गरज वाटू लागली. त्यातून हात, पाय, बोटे, मूठ, पसा, ओंजळ इत्यादी उपयोगात आणण्याची त्याला कल्पना सुचली असावी. तसंच अंतर मोजण्यासाठी, 'हाकेच्या अंतरावर', 'हातभर लांब', 'वीतभर उंच', 'काही पावलांवर' अशा प्रकारच्या मापांचा उपयोग सुरू झाला; तर वेळ मोजण्यासाठी सूर्योदय, मध्यान्ह, सायंकाळ, रात्रीचा प्रहर, कासराभर दिवस असे वाक्प्रयोग सुरू झाले. यावरून सुरुवातीला मोजमापांची वाढ ही शरीराचे अवयव आणि नैसर्गिक घटना या माध्यमातूनच झाली असे म्हणता येते.

गणितात नंतर जे अंक विकसित झाले ते माणसाच्या हातापायाच्या बोटांवरूनच. 1 ते 9 अंक हे मूळ अंक आणि नंतर आलेला शून्य असे हे दहा अंक हाताची बोटे दहा लक्षात घेऊनच तयार झाले असावेत. कारण

आकृती क्र. २

दहा-दहाचा एक गठ्ठा करणं आणि त्यावरून मोजमाप करणं सोपं जात होतं. हीच ती गणितातील मूलभूत **संख्यालेखन पद्धती** होय. संख्या दाखवण्यासाठी आर्य, इजिप्शियन, बाबिलोनियन, ग्रीक, रोमन इत्यादी प्राचीन संस्कृतीतील लोक निरनिराळी चिन्हे वापरीत असत. मातीच्या विटांवर (आकृती क्र. ३) दाखवल्याप्रमाणे खुणा करीत असत. या चिन्हांनाच नंतर अंक ही संज्ञा मिळालेली दिसते. या सर्व घडामोडीत सर्वांत महत्त्वाची घटना म्हणजे प्राचीन भारतीयांनी ज्या चिन्हांचा प्रथम

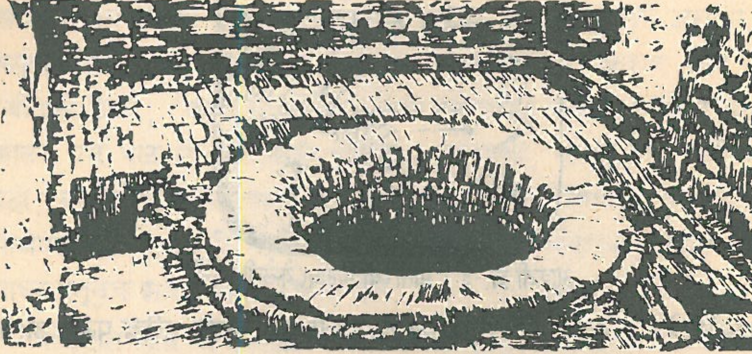
आकृती क्र. ३ : मातीच्या विटावर केलेली चिन्हें

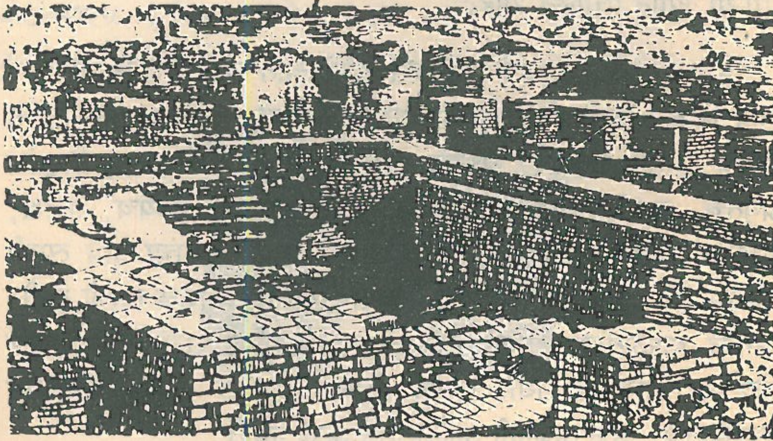
उपयोग केला आणि जी संख्यालेखन पद्धती सुरू केली, तीच पद्धत आज साऱ्या जगात प्रचलित आहे.

वैदिक काळात आजचे अंक जरी अस्तित्वात नसले तरी त्यांनी चिन्हं मात्र निश्चित केली होती. वाजसनेयी संहितेमध्ये 'एकंच दशंच, दशंच शतंच, शतंच सहस्रंच, सहस्रंच अयुतंच, अयुतंच नियुतंच, नियुतंच प्रयुतंच, प्रयुतंच अर्बुदंच, अर्बुदंच नर्बुदंच, सुद्रश्च, मध्यंच, अंतश्च, परार्धश्च' अशा प्रकारचं वचन लिहिलेलं आढळतं. याचा अर्थ त्यानी एकावर तेरा शून्ये देऊन तयार झालेल्या संख्येपर्यंत मजल मारली होती. ऋग्वेद काळातील ऋर्षीनी तर एकावर एकोणीस शून्ये देऊन तयार होणाऱ्या संख्याही तयार केल्या होत्या. पण हे सगळं चिन्हांच्या स्वरूपातच. अंक अजूनही अस्तित्वात आले नव्हते.

मोहेंजोदारो आणि हडप्पा संस्कृतीत जरी गणिताची वाढ झालेली असली; भूमितीय प्रमेये तयार झालेली असली आणि त्यांचा व्यावहारिक उपयोगही ते लोक करीत असले तरी त्या काळीही अंकांचा शोध लागला नव्हता. विशिष्ट चिन्हांच्या साहाय्यानेच गणिताचा अभ्यास केला जायचा. ती चिन्हे कोणती होती याचा आजही आपल्याला पुरता छडा लागलेला नाही. परंतु सम्राट अशोकाच्या काळचे

(इ.स. पूर्व 273 ते 232) काही स्तंभालेख सापडले आहेत. त्यावरून त्यावेळच्या गणन पद्धतीचा बोध होतो. अर्थात ती पद्धती आजच्यापेक्षा भिन्न होती हे लक्षात येते.





आकृती क्र. ४ : मोहेंजोदरो आणि हडप्पा संस्कृतीतील बांधकामाचे अवशेष

4 6 50 200

आकृती क्र. ५ : सम्राट अशोकाच्या काळातील ब्राह्मीलिपीतील अंक

सम्राट अशोकाच्या काळातही शून्याचा शोध लागलेला नव्हता. त्यावेळी दहापर्यंतच्या अंकांसाठी वेगवेगळी चिन्हे वापरली जात असत. पुढे 20, 30, 40, 50.....100, 200 या संख्यांसाठीही स्वतंत्र चिन्हे दिली होती. अशोकानंतर जेव्हा सातवाहनांचं राज्य सुरू झालं तेव्हा त्यांनी अनेक गुहा खोदल्या, लेणी निर्मिली. त्यामध्ये सांख्यिक चिन्हांचा उल्लेख आढळतो. महाराष्ट्रातील नाणेघाटात सापडलेल्या लेखांमध्ये 1 ते 10 पर्यंतच्या संख्यांना स्वतंत्र चिन्हे दिलेली आढळतात. 20 ते 100

1 2 3 4 6 7 9 10

20 80 100 200 300 400 700

1000 4000 6000 10,000 20,000

आकृती क्र. ६ : नाणेघाटातील लेण्यात सापडलेले अंक

आणि 200, 300, 400......1000 या संख्यांसाठीही स्वतंत्र चिन्हे दिलेली आहेत. महत्त्वाची सुधारणा म्हणजे, दोनअंकी व तीनअंकी संख्या 1, 2, 3, 4....9 या संख्यांच्या चिन्हांचा एकापुढे एक ठेवून केलेला वापर असेही आढळते. पण इ.स. नंतरच्या पहिल्या शतकापर्यंत या पुढची झेप काही दिसत नाही. याचाच दुसरा अर्थ म्हणजे, तो वेळपावेतो शून्याचा शोध लागलेला नव्हता.

चिन्हांमध्ये सुधारणा होऊनसुद्धा अजूनही गणिती आकडेमोड सुटसुटीत होत नव्हती. मोठ्या संख्यांच्या बेरजा / वजाबाक्या, गुणाकार / भागाकार करणे कष्टाचे व कटकटीचे होते. त्यासाठी सोप्या पद्धतीची गरज होती. ही कोंडी फोडण्याचे प्रयत्नही चालू होते. ही कोंडी काही प्रमाणात चौथ्या शतकात आर्यभटाने फोडली. शून्याची कल्पना त्यांच्या काळी आकारत होती असे त्यांच्या गणिताच्या मांडणीवरून आढळते. पण तरीही शून्याची संकल्पना अजूनही स्पष्ट झाली नव्हती.



आकृती क्र. ७ : आर्यभट

आर्यभटानंतरच्या चौथ्या-पाचव्या शतकातील जी 'बक्षाली हस्तलिपी' सापडली त्यात मात्र शून्याचा अर्थ सांगणारं एक चिन्ह दिसतं. येथे शून्याच्या जागी टिंबाची योजना केलेली आढळते. याचा अर्थ दुसऱ्या शतकापासून पाचव्या शतकापर्यंत शून्याची संकल्पना हळूहळू पण निश्चितपणे विकास पावत होती. ह्या सगळ्या इतिहासाचा मागोवा घेऊन सहाव्या शतकातील ब्रह्मगुप्तानं जगाला एक महान देणगी दिली. आणि ती म्हणजे **शून्याची देणगी.**

या या या

1 2 3 4 5

6 7 8 9 0

आकृती क्र. ८ : बक्षाली हस्तलिपि (अंक-संकेत)

0 0 0

शून्याचा प्रवास 2

शून्याची संकल्पना स्पष्ट करताना ब्रह्मगुप्ताच्या तर्कसंगतीची आणि शास्त्रीय दृष्टिकोनाची कास धरणारी पराकोटीची बुद्धिमत्ताच दिसून येते. त्याकाळची गणितातील महत्त्वाची अडचण म्हणजे मोठमोठ्या संख्या सोप्या पद्धतीनं कशा मांडाव्यात आणि आकडेमोड कशी सुलभ करावी हीच होती. कारण दहा, वीस, तीस, चाळीस, पन्नास.....शंभर इत्यादींना प्रत्येकी स्वतंत्र चिन्हं दिली होती. त्यामुळं रोमन पद्धतीत दहा हजार ही संख्या मांडताना C हे चिन्ह शंभरवेळा एकापुढे एक असे मांडावे लागे. म्हणजे यात जागेचा अपव्यय तर व्हायचाच, पण किचकटपणाही वाढीला लागलेला असायचा. इ.स. 628 की, ज्यावेळी ब्रह्मगुप्तानं ब्रह्मस्फुटसिद्धांत लिहिला, ती संख्या मांडायची झाल्यास C सहा वेळा म्हणजे सहाशे, X दोन वेळा म्हणजे वीस आणि आठ अशी मांडणी करावी लागते. म्हणजेच 'CCCCCCXXVIII'ही झाली सहाशे अठ्ठावीस संख्या. आता अशा मांडणीतील संख्या गुणाकार / भागाकार आदी क्रियांना त्रास देतील नाहीतर काय ?

शून्याची संकल्पना मांडताना ब्रह्मगुप्त म्हणतो – ''शून्य म्हणजे कशाचाही संपूर्ण अभाव. म्हणजे एका अर्थानं 'काहीच नसणे'हे दाखवणारी संख्या आणि असण्याचाही अभाव.

'एक' म्हणजे पूर्णत्व असण्याची सुरुवात. ईश्वर हा एक आहे. पण ओम् उमटण्यापूर्वी विश्वात अंध:कार होता. म्हणजे सगळीकडं काहीच नव्हतं. याचाच अर्थ सगळं शून्यवत् होतं. या ईश्वरानंच मग **'दोन'** ब्रह्म आणि माया निर्माण केले. त्यातून त्रिगुण – रज, तम आणि सत्त्व असे **'तीन'** तयार झाले. ब्रह्म आणि मायेतून निर्माण झालेल्या संसाराला उपयुक्त

असे नंतर **'चार'** वेद तयार झाले. त्यातून पंचमहाभूते म्हणजे **'पाच'** साकारले. या पंचमहाभूतांतून जग निर्माण झाले. त्यात जीवाची उत्पत्ती झाली. आणि मग काम, क्रोध, लोभ, मोह, मद, मत्सर असे **'सहा'** षड्रिपू निर्माण झाले. मग कळले सृष्टीतील **'सप्त'**रंग' त्यानंतर ज्ञात झाल्या **'अष्ट'**दिशा' आणि नंतर झाले जीवनातील **'नव'**रस'

आणि मग एक चक्र पूर्ण होऊन पुन्हा शून्यापासून सुरुवात. म्हणजे त्या चक्रात सारे विलीन होऊन पुन्हा सगळ्याचाच अभाव. म्हणून शून्य म्हणजे चक्र – एक पूर्ण वर्तुळ.

अभावापासून सुरुवात होऊन नवरसापर्यंत एक चक्र पूर्ण होतं म्हणून नऊनंतर एक आणि शून्य मांडायचा. याचा अर्थ एक चक्र पूर्ण झालं. म्हणजे ही संख्या झाली 'दहा'. आता पुन्हा दुसऱ्या चक्राची पहिल्यापासून सुरुवात. म्हणून एकावर एक, एकावर दोन, एकावर तीन..... असे करीत करीत एकावर नऊ मांडायचे म्हणजे दुसरं चक्र पूर्ण होतं. म्हणून मग पुढं दोनावर शून्य मांडायचं. म्हणजे ह्या झाल्या अकरा, बारा, तेरा.... एकोणीस आणि वीस अशा संख्या. कारण अकरा म्हणजे एक पूर्ण चक्र आणि नंतर एक, बारा म्हणजे एक पूर्ण चक्र आणि नंतर दोन....याप्रमाणे.

अशाप्रकारे दहा चक्रे पूर्ण झाली की, पुन्हा शून्यापासून नवीन सुरुवात म्हणजे झाले 'शंभर' याचाच अर्थ कोणतीही मोठी संख्या लिहिताना शून्याचा उपयोग केला की ती संख्या लहान होऊन जाते. आणि म्हणूनच शून्य हा गणिताच्या विकासाचा आधारभूत पाया आहे.''

ब्रह्मगुप्ताची ही मांडणी खरोखरच किती प्रगल्भ आहे नाही ? आता या पद्धतीनं मघाचीच सहाशे अठ्ठावीस ही संख्या मांडायची झाली तर शतकाच्या ठिकाणी सहा, दशकाच्या जागी दोन आणि एककाच्या जागी आठ मांडले की झाले 628. रोमन लिपीतील CCCCCCXXVIII ही संख्या आणि ब्रह्मगुप्ताच्या शून्याच्या शोधामुळं तयार झालेली 628 ही संख्या ह्यापैकी कोणती पद्धत सोपी आहे हे वरील विवेचनावरून आता तुम्हीही सांगू शकाल. याच पद्धतीनं विचार केल्यास रोमन लिपीतील दहा

हजार म्हणजे C शंभर वेळा आणि ब्रह्मगुप्ताच्या मांडणीत 10,000 म्हणजे एकावर चार शून्ये दिली की झाले. किती सोप करून टाकलं हे गणित ब्रह्मगुप्तानं !

त्यामुळे एकंदरीतच शून्याचा शोध हा महान क्रांतिकारी ठरला. गणिताची आणि मानवाची उत्क्रांतीही झपाट्यानं झाली. शून्याची देणगी देऊन ब्रह्मगुप्तानं साऱ्या जगाला भारताचं ऋणी करून ठेवलंय यात शंकाच नाही.

असं म्हणतात की, मोठ्या संख्यांचा विचार करणं आणि त्यांना चिन्हे देणं हा प्राचीन भारतीयांचा वेळ घालवण्याचा आवडता छंद होता. अशावेळेस ते हाताच्या बोटांचा उपयोग करीत आणि दहाच्या पटीत त्यांची मांडणी करीत असत. दहाच्या पटीत बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार करण्यातूनच दशमान पद्धतीचा जन्म झाला. उदाहरणार्थ,

$$\frac{1}{5} = \frac{1 \times 10}{5 \times 10} = \frac{2}{10} = 0.2$$

असा विचार करता येतो. सुरुवातीची दशमान पद्धती अशा प्रकारे आकार घेऊ लागली होती.

शून्याचा शोध लागल्यानंतर नवीन अंकपद्धतीत संख्यांच्या स्थानांचा विचार केला गेला. उदा.

$$5324 = 5000 + 300 + 20 + 4$$
$$= 5 \times 1000 + 3 \times 100 + 2 \times 10 + 4$$
$$= 5 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 4$$

येथे पाच ही संख्या सहस्रस्थान, तीन शतंस्थान तर दोन दशंस्थान आणि चार एकंस्थान दर्शविते. तसेच शून्याच्या स्थानामुळेही संख्येत फरक होऊ शकतो. उदा. 32, 302, 3002, 320 इत्यादी. एवढंच नव्हे तर दशांशस्थळाच्या अलीकडील आणि पलीकडील शून्याच्या स्थानामुळे संख्येची किंमत बदलू शकते. उदा. 1.20, 1.02, 0.12, 0.012 इत्यादी. दशांशस्थळाच्या अलीकडे शून्य असेल तर ती संख्या

एकापेक्षा लहान होते; पलीकडे शून्य आणि त्यानंतर संख्या असेल तर त्या शून्याला किंमत असते. पण त्या संख्येनंतर कितीही शून्ये आली तरी त्यांना किंमत नसते. हीच शून्ये संख्येनंतर दशांशस्थळाच्या अलीकडे असतील तर ती संख्या प्रत्येक शून्याबरोबर मोठी होत जाते. म्हणजेच त्या शून्याला किंमत असते. आहे की नाही कमाल या शून्याची !

सुरुवातीला शून्याचा अर्थ 'काहीच नाही' असा घेऊन त्याची संकल्पना मांडली. पण 'काहीच नाही' म्हणजे रिकामी जागा वा पोकळी वा अर्थहीन शब्द असा नाही घ्यायचा. कारण, काहीच नसायला मुळात काहीतरी असायला हवं ना ? म्हणजे अस्तित्व नसलेलं अस्तित्व झालं म्हणायचं ! असा गमत्या शून्य भारतीय गणितज्ज्ञांना वेड लावून गेला ! परदेशस्थ प्रवाशांनी ज्यावेळी भारतातील ही गणिताची प्रचंड वाढ बघितली तेव्हा तर त्यांचे डोळेच दिपले. त्यांच्या गणितीय पद्धतीपेक्षा भारतीय पद्धती अत्यंत सोपी आणि सुटसुटीत होती. मग त्यांनी त्यांच्या त्यांच्या देशात जाऊन या पद्धतीचा प्रसार नसता केला तरच नवल ! अशाप्रकारे भारतीय गणित हळूहळू जगभर प्रस्थापित झालं. शून्याला आणि आपल्या एक ते नऊ अंकांना सगळ्यांनी आपलंसं केलं.

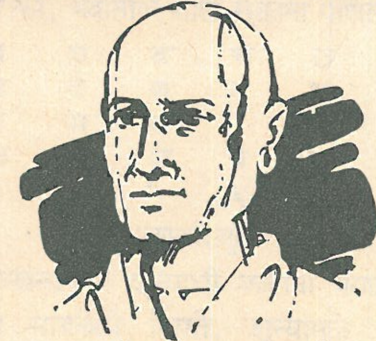


आकृती क्र. ९ : ब्रह्मगुप्त

ब्रह्मगुप्तानं (इ.स. 598 ते 660) 'ब्रह्मस्फुट सिद्धांत' नावाचा एक ग्रंथ लिहून त्यात शून्याच्या संबंधीचे काही नियम सांगितले. ते नियम आजही तंतोतंत तसेच पाळले जातात. यावरून भारतीय गणितज्ज्ञांची शून्याची संकल्पना किती स्पष्ट होती हेच जाणवते. ते नियम असे –

१) A + 0 = A म्हणजे A ही कुठलीही संख्या असेल आण तीत शून्य मिळवला तरी संख्येच्या किंमतीत फरक पडत नाही. ह्या गुणधर्माला आज आपण 'बेरीज अविकारक' असं म्हणतो. तीच गोष्ट वजाबाकीची म्हणजे -A + 0 = A

२) A x 0 = 0 म्हणजे A ह्या कोणत्याही संख्येला शून्याने गुणले असता गुणाकार शून्य येतो. ह्या गुणधर्माला आज आपण 'शून्याचा गुणाकार गुणधर्म' असं संबोधतो. हाच गुणधर्म भागाकारालाही ब्रह्मगुप्तानं लावला आहे. म्हणजे A÷0 = 0 पण आधुनिक गणितात हा भागाकाराचा गुणधर्म रद्दबातल ठरला आहे. कारण आजच्या संकेतानुसार शून्याने कोणत्याही संख्येला भागिले तर उत्तर अनंत संख्या येते. शून्य नाही. ब्रह्मगुप्ताची ही चूक भास्कराचार्यांनी (इ.स. 1114 ते 1185)



आकृती क्र. १० : भास्कराचार्य

सुधारली. त्यांनी त्यांच्या प्रसिद्ध 'लीलावती' ग्रंथात असं नमूद केलंय की, ''शून्याने एखाद्या संख्येला भागले तर अनंत संख्या मिळते की, जी देवाने सृष्टीला उत्पन्न केले आणि तिचा नाश केला तरीही बदलणार नाही.''

सहाव्या शतकापासून ते दहाव्या शतकापर्यंतच्या काळातच भारतीय गणिततज्ज्ञांनी शून्यापेक्षा लहान संख्यांचा वेध घेतला. त्यातूनच मग -१, -२, -३.....अशा ऋण संख्यांचा जन्म झाला. त्यामुळे बीजगणितातल्या अनेक कूटप्रश्नांचा आणि समीकरणांचा उलगडा झाला. खगोलशास्त्राच्या अभ्यासालाही मदत झाली. या चारशेवर्षांच्या काळात भारत हा साऱ्या जगाचं गणिताच्या अभ्यासासाठी केंद्रस्थान बनला होता. म्हणूनच गणिताच अध्ययन करणं हे त्याकाळी मानाचं लक्षण मानलं जात असे. इ.स. 662 सालातील मुफ्रीटीस नदीच्या काठावर वस्ती करून अध्यापनाचं कार्य करणारा महान तत्त्ववेत्ता धर्मगुरू सेवरस सेवोक्त हा सुद्धा भारतीयांच्या गणिताच्या भरारीने भारवून गेला होता. त्यानं भारतीय गणित म्हणजे 'आधुनिक मेंदूचा आविष्कार'या अर्थाचा ग्रंथ लिहून भारतीय गणिततज्ज्ञांची भलामण केलेली आढळते. ह्या गणिताच्या ज्योतीने आता खगोलशास्त्र आणि व्यवहारशास्त्र यांची घोडदौड सुरू केली होती.

0 0 0

शून्याचा प्रवास 3

ऋग्वेदकाळात आजच्यासारखे अंक अस्तित्वात नव्हते. त्यासाठी ते मुळाक्षरांचा उपयोग करीत असत. त्यांच्याशी अंकांच्या कल्पना निगडित असत. ह्या संकल्पना मात्र पक्क्या होत्या. ह्याचा उलगडा करणारे 'कटपयादि सूत्र' दुसऱ्या आर्यभटाने ११ व्या शतकात आपल्या ग्रंथामध्ये अंकांचे आणि दर्शक अक्षरांचे कोष्टक तयार केले. त्यावरून ऋग्वेदातील 'स्यवामी सूक्ताचा' अर्थ नंतर लावण्यात आला. हे सूक्त या वेदात पहिल्या मंडलात आहे. यात दीर्घतमस ऋषींनी लिहिलेल्या २५ ऋचा आहेत. त्यावरून पृथ्वीचा व्यास, वजनमान, गुरुत्वाकर्षण शक्ती, पृथ्वी ते सूर्यापर्यंतचे अंतर, एवढेच काय तर आपल्या सूर्यमालेला जवळचा असणारा मित्रतारा ह्याचंही अंतर सांगणारे स्थिरांक काढता येतात. यावरून असं लक्षात आलं की, वेदांतील काही सूक्तांना गणिती अर्थ आहे.

क	ख	ग	घ	ङ	च	छ	ज	झ	ञ
ट	ठ	ड	ढ	ण	त	थ	द	ध	न
प	फ	ब	भ	म					
य	र	ल	व	श	ष	स	ह	ळ	क्ष
१	२	३	४	५	६	७	८	९	०

कटपयादि सूत्र

तथापि अंकलेखनामध्ये शून्याची कल्पना वराहमिहिरानेही त्याच्या 'पंचसिद्धांतिके'त मांडलेली दिसते. शून्यामुळे अंकाच्या किंमतीत दसपटीनं फरक पडतो हेही त्यानं या ग्रंथात नमूद केलंय. ऋग्वेदातील ऋचांमध्ये अंक नसले तरी शून्याविषयीचा विचार विचाराधीन असावा असे दिसते. नंतर पहिल्या आर्यभटाने शून्याची संकल्पना मांडल्यावर म्हणजेच त्यासाठी काही मुळाक्षरांची सोय केल्यावर ब्रह्मगुप्तानं शून्याला

अस्तित्व देण्याचं आणि त्याचा स्पष्ट अर्थ देण्याचं महान कार्य केलं.

आता आपण हे 'कटपयादि सूत्र' काय आहे त्याचे कोष्टक पाहू.

'अंकांना वामनो गतिः ।' या नियमानुसार सर्व अक्षरांचं अंकीय वाचन करायला हवं. याचा अर्थ अंक उजवीकडून डावीकडे वाचावयाचा आहे. यात पहिल्या अक्षराने एकम्‌स्थान, दुसऱ्या अक्षराने दहम्‌स्थान, तिसऱ्या अक्षराने शतम्‌स्थान आणि पुढे याप्रमाणे – असे दर्शविले जाते. उदा. 'वाम'या शब्दास प्रथम उलटा वाचायचा म्हणजे प्रथम 'म' अक्षराचा अर्थ कोष्टकाप्रमाणे ५ आणि नंतर 'व' अक्षराचा अर्थ ४ असा लक्षात घेऊन त्या सबंध शब्दाचा अर्थ ५४ असा होतो. 'पलित' शब्दामध्ये त - ६, ल - ३ आणि प - १ म्हणून पलित - ६३१ असा अर्थ होईल.

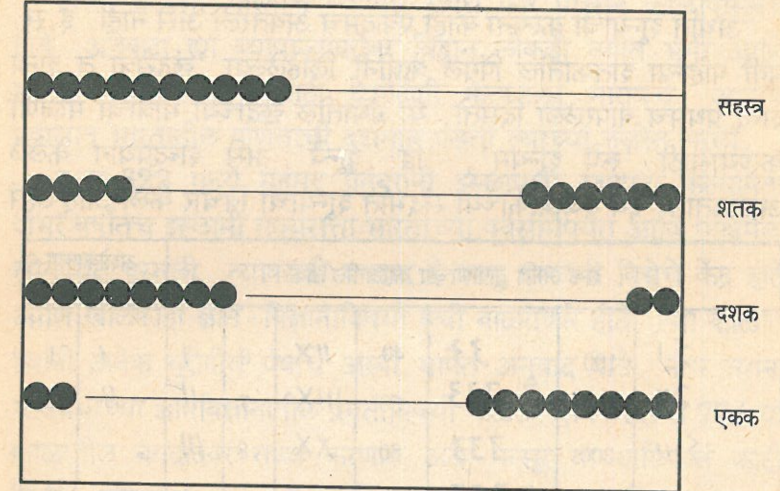
याप्रमाणे मुळाक्षरांचं अंकीय वाचन केल्यावर ऋचांमधील शब्दांचा गणिती अर्थ लावता येतो. अशाप्रकारे भारतात गणित प्राचीन काळी पुढारलेल्या अवस्थेत होतं. नंतर ते अरबांकडे आणि अरबांकडून पाश्चिमात्य जगतात पोहोचलं. परंतु नंतर मात्र आपल्याकडे गणिती ज्ञानाची परंपरा खंडित होत गेली आणि पाश्चात्य जगात त्याला आधुनिक अर्थानं ऊर्जितावस्था प्राप्त झाली.

आपल्याकडे ज्ञानसाधना खंडित होण्याच प्रमुख कारण म्हणजे आपण रूढी, चालीरीती आणि चातुर्वर्ण्य समाजव्यवस्थेच्या चौकटीत बद्ध होत गेलो. वेद अपौरुषेय आहेत आणि ज्ञानाचा मक्ता हा काही मूठभर उच्चवर्णीयांसाठीच आहे अशी विचारधारा प्रस्थापित होत गेली – नव्हे काही घटकांनी जाणूनबुजून ही रचना घट्ट रुजवली. त्यामुळं प्राचीनं काळी आपल्या वेदांत आणि इतर धर्मग्रंथांत सारं ज्ञान सामावलंय अशी कूपमंडूक वृत्ती वाढीस लागली. परिणामी आपली प्रगती खुंटली आणि आपण डबक्यातल्या किड्यांप्रमाणे वळवळू लागलो. याचा व्हायचा तोच परिणाम झाला. शून्याची आणि अंकांची देवाणघेवाण जगाला देणारा भारत अधोगतीस जाऊन एक गुलाम राष्ट्र बनला. ही गुलामी बौद्धिक आणि मानसिकही होती. ह्या गुलामीतून आजही आपण पुरते बाहेर पडलेलो नाही.

0 0 0

शून्याचा प्रवास 4

प्राचीन इजिप्शियन, बाबिलोनियन, चिनी इत्यादी लोक मोठ्या संख्यांसाठी 'ॲबॅकस' नावाच्या गणितीयंत्राचा उपयोग करीत असत. हल्ली बालवर्गातील मुलांसाठी गोट्यांची पाटी आपण वापरतो ना ? ती ह्या ॲबॅकसचीच आवृत्ती आहे. त्यातही रोमन लोकांच्या



आकृती क्र. ११ : ॲबॅकस (गणनयंत्र) येथे ६२८ ही संख्या दाखवली आहे.

संख्यापद्धतीचा बराच प्रसार जगभर झाला होता. परंतु त्यांची संख्यालेखन पद्धती मोठ्या संख्यांच्या बाबतीत बोजड व क्लिष्ट होती. कारण मोठ्या संख्या लिहिताना शून्याच्या अभावी चिन्हांची व अक्षरांची लांबच्या लाब माळच तयार होत असे. उदा. 12 = XII, 113 = CXIII, 214 = CCXIV, 315 = CCCXV, 416 = CCCCXVI,

517 = CCCCCXVII, 618 = CCCCCCXVIII इत्यादी. या संख्यालेखन पद्धतीमुळं बेरीज, गुणाकार, वजाबाकी, भागाकार ह्या मूलभूत क्रिया करणंही कठीण जात असे. या उलट, भारतीयांच्या शून्याचा शोधामुळं ते 10^{14}एवढ्या मोठ्या संख्याही सहजगत्या मांडू शकत. रोमन पद्धतीनं इतकी मोठी संख्या लिहायची म्हणजे चिन्हांच्या किती ओळी लागतील याची कल्पनाच केलेली बरी. अंकांच्या स्थानावर त्यांची किंमत ठरवून दिल्यानं, दशमान पद्धतीत त्यांची मांडणी करण्याची भारतीय पद्धती या पार्श्वभूमीवर भारतीयांच्या विवेकी आणि विचारी वृत्तीचा आविष्कारच दाखवते असं म्हटल्यास वावगं ठरू नये.

अर्थात शून्याची कल्पना काही एकदमच अवतरली असे नाही. इ.स. पूर्वी पहिल्या शतकातील पिंगल ऋषींनी लिहिलेल्या 'छंदसूत्रा'त शून्य शब्द प्रथमच वापरलेला दिसतो. या ग्रंथातील छंदाच्या मात्रांची मोजणी करण्यासाठी 'रूपे शून्यम्', 'द्विः शून्ये' असे शब्दप्रयोग केलेले आढळतात. इथे वजाबाकीच्या संदर्भात शून्याचा विचार केला आहे असं

शक आणि कुषाणांच्या काळातील अंक								अशोकाच्या काळातील अंक	
?।	100	33	40	॥X	6	/	/	1
?॥	200	733	50	।।।X	7	//	//	2
?।।।	300	333	60	XX	8	///		
॥3?।	122	7333	70	7	10	X	////	4
X7 ?73?॥	274	3333	80	3	20	/X	/////	5

आकृती क्र. १२

दिसतं. याचा अर्थ या काळात शून्याची कल्पना मूळ धरू लागली होती. त्यानंतर इ.स. नंतरच्या चौथ्या शतकात मथुरेतील कनिष्क राजे राज्य करीत असताना गणितात झालेल्या प्रगतीचा आढावा 'बक्षाली' नावानं लिहिलेल्या भूर्जपत्रावरील हस्तलिखितात सापडतो. या हस्तलिखितात 1 ते 10 पर्यंतच्या अंकांचे संकेत दिलेले आहेत आणि शून्याच्या जागी टिंबाचा

वापर केलेला आहे. या काळी शून्याला 'ख', 'गगन', 'अक्ष', 'नभ', 'अनंत' अशाप्रकारची नावे दिलेली आढळतात. अशाप्रकारे तिसऱ्या शतकापर्यंत शून्याची संकल्पना बरीच स्थिर झालेली दिसते. या काळात जुन्या-नव्या संकल्पनांची सरमिसळ झालेली दिसते. त्यातूनच अंकपद्धतीत बदल होऊन नवीन अंकपद्धतीचा विकास झाला. हा विकास सातव्या शतकापर्यंत जवळजवळ पूर्ण होत आला होता. या दरम्यानच्या काळात अंक आणि शून्याचा प्रवास हळूहळू देशाबाहेरही सुरू झालेला दिसतो.

अरबी देशांशी भारताचे व्यापारी संबंध फार प्राचीन काळापासूनच होते. अनेकदा ह्या व्यापाऱ्यांबरोबर विद्वान लोकही नवीन भूमी आणि ज्ञानकण गोळा करण्यासाठी देशोदेशी फेरफटका मारायचे. अशाच प्रवासात भारतातील गणिताची दशमान पद्धती त्यांच्या नजरेत भरली.

इ.स. 622 मध्ये महंमद पैगंबरांनी इस्लामची स्थापना केल्यानंतर शंभर वर्षांतच इस्लामी राज्यसत्ता भारताच्या पूर्वसीमेपर्यंत आणि पश्चिमेला स्पेनपर्यंत पसरली. त्याकाळी बगदाद हे शहर इस्लामी विद्येचे केंद्र होते आणि खलिफाही ज्ञान-विज्ञानाविषयी रुची बाळगणारे होते. त्या काळात त्यांनी अनेक युरोपीय ग्रंथांचे अरबी भाषेत अनुवाद केले. नंतर त्यांना भारतीयांच्या ज्ञानविज्ञानातील प्रगतीविषयी कळले. सन 753 ते 774 या काळातील बगदादवर राज्य करणारा अल्-मन्सूर या खलिफानं काही विद्वान पंडितांना भारतातील सिंध प्रांतात (सध्या सिंध प्रांत हा पाकिस्तानात आहे.) अभ्यासासाठी पाठविले. त्यांनी खगोलशास्त्र, गणित आणि वैद्यकशास्त्र अशा विविध विषयांचा अभ्यास करून त्यावरील उपलब्ध ग्रंथांचे अरेबियन भाषेत रूपांतर केले. अशाप्रकारे भारतीय अंकांचा प्रवास सुरू झाला.

ह्या अरबी लोकांची जरी स्वतःची अशी अंकपद्धती होती, तरी त्यांना जेव्हा भारतीय अंकपद्धतीतील वैज्ञानिकता कळली, तेव्हा त्यांनी तिचा ताबडतोबीनं स्वीकार केला. भारतीय अंकांना ते 'धुळाक्षरं' म्हणत. अगदी लहानपणी शाळेत जाण्याची सुरुवात करताना तुम्ही कधीतरी

१ २ ३ ४ ५ ६ ७ ८ ९ ०

आकृती क्र. १३ : अरबी अंकपद्धती

'धूळपाटी' हा शब्द ऐकला असेल. कारण पूर्वीच्या काळी भारतीय जमिनीवरील मातीत काडीच्या साहाय्यानं अक्षर/अंक काढीत. म्हणून त्यांना धुळाक्षरं म्हटलं जात असे.

सुरुवातीला ह्या अरबी देशांमध्ये त्यांचे अरबी अंक आणि आपली अंकपद्धती या दोहोंचा वापर होत असे. पण नंतर त्यांनी त्यांच्याच चिन्हपद्धतीला प्राधान्य दिले. जरी 1 ते 9अंक अरबी होते तरी शून्य मात्र त्यांनी भारतीयांकडूनच स्वीकारला. तसेच अंकांची चिन्हं जरी वेगळी असली तरी अंकपद्धती भारतीयच होती. अरबी गणितज्ज्ञांनी भारतीय अंकपद्धतीची खूपच स्तुती केलेली आढळते. त्याकाळी लिहिलेल्या ग्रंथात त्यांनी असं स्पष्ट म्हटलंय की, गणिताची आधुनिक ओळख आणि अंकपद्धती आम्हाला भारतीयांकडूनच मिळालेली आहे.

त्याकाळी ग्रीस हे जगातील विद्येचं माहेरघर समजलं जायचं. त्यामुळे युरोपियन लोकांना इतर देशांतील विद्वान आणि त्यांच्या ज्ञानाविषयी फारसा आदर वाटत नसे. पण अरबांनी जेव्हा त्यांना भारतीय ग्रंथ आणि गणिताची माहिती दिली आणि प्रत्यक्षात दाखवून दिलं तेव्हा त्याच्याही असं लक्षात आलं की, जगात आपल्यापेक्षाही पुढारलेले लोक आहेत, विद्वान आहेत. अशाप्रकारे शून्य, दशमान पद्धती ह्या अरबी देशांमध्ये तर मोठ्या प्रमाणात प्रसारित झाल्याच, पण युरोपियनांनाही आपल्या मागासलेपणाची जाणीव झाली. तेही मग भारतीय गणिताचं अध्ययन करण्यासाठी भारताकडे धाव घेऊ लागले.

0 0 0

आकृती क्र. १४ ब्राह्मी व ब्राह्मीजन्य लिपींतील १ ते ९ पर्यंतच्या अंकांचा विकास (इ.स.पू. ३ रे ते इ.स. ४ थे शतक)

आधुनिक मराठी	इ. स. पू. ३ रे शतक अशोक-शिलालेख	इ. स. पू. २ रे शतक नाणेघाट-शिलालेख	इ. स. १ ले व २ रे शतक कुशाण-शिलालेख	इ.स. २ रे शतक क्षत्रपत्र व आंध्र-शिलालेख	इ. स. २ रे ते ४ थे शतक क्षत्रप-नाणी	इ. स. ४ थे शतक जग्गयपेट-शिलालेख व पल्लव-दानपत्रे
१		—	—	— —	— —	[illegible]
२		=	=	= =	=	[illegible]
३			≡ ≡	≡	≡	[illegible]
४	+	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
५			[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
६	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
७		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
८			[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
९		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	

आकृती क्र. १५ ब्राह्मी व ब्राह्मीजन्य लिपींतील १ ते ९ पर्यंतच्या अंकांचा विकास (इ.स. ४ थे ते इ.स. ९ वे शतक)

आधुनिक मराठी	इ. स. ४ थे ते ६ वे शतक गुप्त, परिव्राजक व उच्छकल्प-शिलालेख व दानपत्रे	इ. स. ५ वे शतक वाकाटक-दानपत्रे	इ. स. ५ वे ते ६ वे शतक पल्लव व शालंकायन-दानपत्रे	इ. स. ६ वे ते ८ वे शतक वल्लभी दानपत्रे	इ. स. ८ वे ते ९ वे शतक नेपाळ-शिलालेख
१	[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]
२	[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]
३	[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]
४	[illegible]		[illegible]		[illegible]
५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
६	[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]
७	[illegible]			[illegible]	[illegible]
८	[illegible]	[illegible]		[illegible]	
९	[illegible]			[illegible]	[illegible]

आकृती क्र. १६ ब्राह्मी, ब्राह्मीजन्य व खरोष्ठी लिपींतील १ ते ९ पर्यंतच्या अंकांचा विकासक्रम

आधुनिक मराठी	इ. स. ७ वे ते ८ वे शतक गंगवंशीय दानपत्रे	इ. स. ९ वे ते १० वे शतक प्रतिहार-शिलालेख व दानपत्रे	इ. स. ५ वे ते ८ वे शतक संकीर्ण शिला-लेख व दानपत्रे	इ. स. ६ वे शतक श्री. बावर संग्रहित हस्तलिखिते	नेपाळमधील बौद्ध हस्तलिखिते	जैन हस्तलिखिते	खरोष्ठी: शक, पार्शियन व कुशाण-शिलालेख	खरोष्ठी: अशोक-शिलालेख
१				[illegible]	[illegible]	[illegible]	/	/
२	[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	//	//
३	[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]	///	
४			[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	X	////
५	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	/X	/////
६	[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	//X	
७	[illegible]			[illegible]	[illegible]	[illegible]	///X	
८	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	XX	
९		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		

आकृती क्र. १७ आधुनिक भारतीय भाषांतील १ ते ९ पर्यंतचे प्रचलित अंक

मराठी	१	२	३	४	५	६	७	८	९	०
काश्मिरी (शारदा)	𑇑	𑇒	𑇓	𑇔	𑇕	𑇖	𑇗	𑇘	𑇙	𑇐
पंजाबी (गुरुमुखी)	੧	੨	੩	੪	੫	੬	੭	੮	੯	੦
बंगाल व असमिया	১	২	৩	৪	৫	৬	৭	৮	৯	০
ओडिया (उडिया)	୧	୨	୩	୪	୫	୬	୭	୮	୯	•
गुजराती	૧	૨	૩	૪	૫	૬	૭	૮	૯	૦
हिंदी	१	२	३	४	५	६	७	८	९	०
उर्दू	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	•
सिंधी	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	•
तेलुगु	౧	౨	౩	౪	౫	౬	౭	౮	౯	౦
कन्नड	೧	೨	೩	೪	೫	೬	೭	೮	೯	೦
मल्याळम्	൧	൨	൩	൪	൫	൬	൭	൮	൯	
तमिळ	௧	௨	௩	௪	௫	௬	௭	௮	௯	

शून्याचा प्रवास 5

अकराव्या शतकापर्यंत अरबांनी स्पेनमध्ये अनेक विद्यापीठांची स्थापना केली होती. युरोपातील विद्वान या विद्यापीठात येऊन त्यांचं जुनं ज्ञान जे आता अरबी भाषेत उपलब्ध होतं ते शिकण्यासाठी येत. त्याच वेळेस त्यांना अरबांनी अनुवादित केलेले भारतीय ग्रंथही अभ्यासायला मिळाले. त्यांनी प्रभावित होऊन ते त्यांचं रूपांतर लॅटिन भाषेत करू लागले.

इ.स. 790 ते 850 या काळातील बगदादमधील अल् मामून विज्ञान प्रबोधिनीतील प्रख्यात गणितज्ज्ञ अल्ख्वारिज्मींनी 830 साली भारताला भेट दिली होती. त्यांनी येथील व्यापारीही पटापट वेगानं आकडेमोड करताना पाहिले. त्याने प्रभावित होऊन बगदादमध्ये गेल्यावर



आकृती क्र. १८ : अल्ख्वारिज्मी

'हिसाब-अल्-जबर' व 'वा-अल्-मुकाबला' असे दोन ग्रंथ, भारतीय गणित – त्यातील अंकपद्धती, शून्याची करामत – यावर विस्तृतपणे माहिती देणारे असे ते ग्रंथ लिहिले. या ग्रंथांनी अरबी लोकांमध्ये भारतीय अंकांना भलतीच प्रसिद्धी मिळवून दिली. त्यामुळे अरबी लोक भारतीय गणिताच्या प्रेमातच पडले म्हणा ना! शून्याचा अनुवाद त्यांनी 'अल्-सिफर' किंवा 'सिफर' असा करून टाकला. त्यांच्या ग्रंथांचा जनमानसावर किती पगडा होता ते आजही जाणवते. कारण 'अल्-जबर' या शब्दावरूनच इंग्रजीतील 'अल्जिब्रा' म्हणजे 'बीजगणित' हा शब्द रूढ झाला आहे.

याच काळात अरबांच्या असंही लक्षात आलं की, भारतीय अंकपद्धती, शून्य संकल्पना आणि अंकांच्या किंमती निश्चित करणाऱ्या स्थानपद्धती ह्या ग्रीकांच्या गणितापासून कितीतरी वेगळ्या आणि पुढारलेल्या आहेत. त्यांच्या गणितातली कमतरता भारतीयांनी केव्हाच भरून काढली आहे. म्हणून त्यांनी भारतीयांकडून मिळालेलं हे ज्ञान इस्लामच्या बाहेर जाऊ न देण्याची खबरदारी घ्यायला सुरुवात केली. युरोपियन किंवा जे जे मुस्लिम नाहीत त्यांना ह्या शिक्षणापासून त्यांच्या विद्यापीठातनं ते वंचित ठेवू लागले. कल्पना अशी होती की, हे ज्ञान गुप्त ठेवल्यामुळं आपलीच मक्तेदारी राहील. आपण जगात पुढारलेले राहू; मग जगावर स्वामित्व करायला कितीसा वेळ ?

कोणत्याही गोष्टीवर बंदी आणली की, माणसाचं कुतूहल जागृत होतं. तुम्हाला नाही का एखादी गोष्ट करू नको म्हटलं की, हटकून ती गोष्ट कुतूहलापोटी करावीशी वाटते ? तसंच त्याकाळच्या युरोपियन विद्वानांचं झालं. हे अरब लोक आपल्यापासून काहीतरी लपवताहेत हे त्यांना जाणवायला लागलं. कारण सुरुवातीला मुक्त असलेल्या भारतीय गणिती ग्रंथांचा अभ्यास अरबांनी मर्यादित केला होता. याचा परिणाम म्हणून एका युरोपियन साधूनं – अल्डार्ड त्याचं नाव – मी इस्लामधार्जिणा आहे असं भासवून अरबांच्या 'कार्डोव्हा' विद्यापीठात प्रवेश घेतला. ज्या विद्यापीठात फक्त मुसलमानांनाच प्रवेश मिळत असे, तिथे तो फसवेगिरी

करून अध्ययन करायला लागला. अध्ययन संपल्यानंतर त्यानं इंग्लंडमध्ये गेल्यावर अल्ख्वारिज्मीच्या 'हिसाब-अल्-जबर'चे लॅटिन भाषेत रूपांतर केले. लॅटिन भाषेत लिहिलेल्या ह्या ग्रंथानं इंग्लंडमधील गणितज्ज्ञांमध्ये प्रचंड खळबळ उडवून दिली. ह्या नवज्ञानाने त्यांना भुरळ घातली. अशाप्रकारे भारतीय अंक शून्यासहित की, ज्यांना हे पाश्चिमात्य 'अरेबिक गणित' म्हणत ते गणित युरोपात प्रवेशते झाले.

ह्याच दरम्यान म्हणजे इ.स. 940 ते 1003 या काळात फ्रेंच राजकारणी आणि गणितज्ज्ञ गिल्बर्ट याला 'अरेबिक गणिताविषयीची



आकृती क्र. १९ : लिओनार्दो-द-पिसा

माहिती मिळाली. त्याने तो प्रभावित झाला आणि हे नवगणित युरोपियनांना शिकवण्याचा त्यानं ध्यासच घेतला. ज्यानं भारतीय गणिताचा युरोपभरं पायाभूत प्रसार केला, त्या 'लियोनार्डो-द-पिसा' या गणितज्ज्ञाला, तो आफ्रिकेतील अल्जेरिया देशात लहान असताना एका अरबानं गणित शिकवलं होतं. तरुणपणी तो इजिप्त, सिरिया, ग्रीस, इटाली इत्यादी देशांत प्रवास करीत होता. तेथील स्थानिक व्यापारी आणि गणितज्ज्ञ यांच्या भेटी घेऊन तो वार्तालाप करीत असे. या सगळ्यांच्या गणिती पद्धतीत त्याला कोणती गणिती पद्धत वेड लावून गेली असेल तर ती भारतीय गणिती पद्धत होय. या पद्धतीतील शून्य, अंकांची स्थानं, त्यामुळं सुलभ होणारी आकडेमोड हे सारं त्याला भारावून टाकणारं होतं.

कारण ह्या सगळ्या गणनक्रिया कोणत्याही गणिती उपकरणाचा (उदा. ॲबॅकस) आधार न घेता पटापट तोंडी अथवा भूर्जपत्रावर सहजगत्या करता येत असत.

इ.स. 1202 मध्ये त्यानं 'लिबर ॲबॅकी' नावाचा लॅटिन भाषेत भारतीय गणित आणि अंकपद्धतीची माहिती देणारा ग्रंथ लिहिला. त्यातील प्रस्तावनेत त्याने युरोपियन गणितज्ज्ञांना, भारतीय गणितपद्धतीचा वापर सुरू करण्याविषयी आग्रहाची विनंती केली होती. त्याकाळी युरोपियनांमध्ये गणिती परंपरा नव्हतीच. युक्लिडनंतर गेल्या हजार वर्षांच्या काळात त्यांच्या गणितात कोणत्याही सुधारणा झाल्या नव्हत्या. त्याच जुन्या ज्ञानाच्या आधारे ते ईस्टरच्या तारखा ठरविण्याचं काम करीत असत. त्यांची विद्यापीठं टॉलेमी आणि ॲरिस्टॉटलच्या पलीकडे काही शिकण्यासारखं उरलंय असं समजतच नव्हती. त्यामुळं लियोनार्डो-द-पिसाचा गणितावरील ग्रंथ हा पुढची दोन शतकं त्यांचा आधारभूत ग्रंथ राहिला. ते एक महत्त्वाचं क्रमिक पुस्तक म्हणून वापरलं गेलं.

त्यामुळं पाश्चिमात्यांमध्ये नवगणिताची आवड निर्माण झाली. ह्या नवज्ञानानं भरलेल्या शिडाचं जहाज हळूहळू विज्ञान आणि तंत्रज्ञानाच्या दिशेनं प्रवास करू लागलं. भविष्यकाळातील (म्हणजे आजच्या) विद्येचं माहेरघर होण्याची ती नांदीच होती. विद्यापीठाचं केंद्र पूर्वेकडून पश्चिमेकडं सरकायला लागणार होतं. अर्थात ह्या झाल्या भविष्यातील घटना. त्या काळातील अरेबिक 'सिफर'चं म्हणजे आपल्या शून्याचं रूपांतर लॅटिन भाषेत 'झेफ्रियम' असं केलं गेलं. जसजसा वेगवेगळ्या युरोपियन देशांमध्ये त्याचा प्रवास होत गेला, तसतशी त्याची स्थानिक नावंही बदलत गेली. हा शून्य मग झेफ्रियमपासून 'झेनेरो', 'झेफ्रियो', 'झिफ्र', 'सेनेरो', 'सायफर' अशा अगणित नावांनी ओळखला जाऊ लागला.

0 0 0

शून्याचा प्रवास 6

सुरुवातीला रोमन अंकपद्धतीची सवय असल्यामुळं व्यापाऱ्यांना भारतीय गणनपद्धती आणि अंक समजण्यास जड जात. शून्य आणि अंकांच्या स्थानांच्या किंमतीचं महत्त्व त्यांना कळत नसे. त्याकाळच्या पश्चिमी विद्वानांनाही भारतीय पद्धती अभिनव वाटत असली तरी तिचे नीट आकलन न झाल्यामुळे ती उथळ वाटत असे. प्रत्येकाला भारतीय अंक वापरणं म्हणजे नवीन भाषा शिकण्यासारखं वाटे. हे युरोपियन गणिती भारतीय गणिताला 'काफरांचे अंक' समजत असत. कारण त्यांना असं वाटत होतं की, हे गणित अरबांचं आहे. आणि अरबांनी त्यांच्या पॅलेस्टाइन या पवित्र भूमीवर कब्जा केलेला असल्यानं ते अरबांना 'काफर' समजत असत. (पॅलेस्टाइन ही येशू ख्रिस्ताची जन्मभूमी होती.) तर काही ह्या अंकपद्धतीला संकेत लिपी समजत. म्हणून त्यांनी ह्या गणिताला 'गुप्त भाषा' असं म्हटलं.

ते काही का असेना; भारतीय अंक आणि शून्यानं निव्वळ आकडेमोडच सुलभ केली असं नाही; तर खगोलीय गणित आणि नौकानयन शास्त्रातही प्रगती घडवून आणली. त्यामुळं समुद्रपर्यटन तसंच व्यापारउदीमही वाढीस लागला. 1299 पर्यंत ही पद्धती एवढी लोकप्रिय झाली होती की, सगळीकडे तिचा सर्रास वापर सुरू झाला. ह्या लोकप्रियतेचा मत्सर वाटून युरेशियामधील इटालीतील व्यापारी प्रमुख केंद्र असलेल्या फ्लोरेन्स शहरातील काही माथेफिरूंनी ह्या पद्धतीवर बंदी आणली. बँकेत तसेच व्यापाऱ्यांनी ही पद्धत न वापरता आपली जुनीच पद्धत वापरावी असा फतवा काढला.

तेराव्या शतकात पॅलेस्टाइनच्या मुक्ततेसाठी ख्रिश्चनांनी अरबांशी युद्ध पुकारले. तेव्हा त्या सैनिकांना भूमध्यसमुद्रातून प्रवास करावा लागला. याकाळात त्यांनी परत जाताना आपल्याबरोबर भारतीय गणितज्ञानही नेले. त्यांना मिळालेल्या नवज्ञानामुळे त्यांनी तेराव्या शतकातच युरोपियन विद्येचं पुनरुज्जीवन करण्यास सुरुवात केली. ह्या पुनरुज्जीवनामुळेच युरोपात औद्योगिक क्रांतीला सुरुवात झाली. पंधराव्या शतकात लागलेला छपाईच्या यंत्राचा शोध हा ह्या विद्येच्या पुनरुज्जीवनाचा एक दृश्य परिणाम होता. छपाईचं तंत्र अवगत झाल्यामुळे गणिताचा प्रसार युरोपभर झपाट्यानं होऊ लागला.

1478मध्ये इटालीतील व्हेनिस शहरात छापलेल्या एका पुस्तकात शून्याविषयी म्हटलं आहे.... ''0 म्हणजे 'सिफर' किंवा 'नल' म्हणजे

युरोपातील भारतीय अंक (दहावे शतक)

१२ वे शतक ते १५ वे शतक

युरोपात होणारा भारतीय अंकांचा विकास

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
										12 वे शतक
										1197 इ.स.
										1275 इ.स.
										1291 इ.स.
										1303 इ.स.
										1360 इ.स.
										1440 इ.स.

आकृती क्र. २० : १२ शतक ते १५ शतक युरोपात होणारा अंकांचा विकास

काहीही नाही हे दाखवणारी संख्या. त्याला स्वत:ला जरी किंमत नसली तरी तो जेव्हा एखाद्या संख्येबरोबर येतो तेव्हा त्या संख्येची किंमत मात्र वाढत जाते.''

भारतीय अंक सुरुवातीला सर्वप्रथम स्पेन, नंतर इटाली, फ्रान्स, इंग्लंड आणि मग जर्मनी याप्रकारे पाश्चिमात्य जगात प्रवेश करते झाले. त्यामुळे सोळाव्या शतकाच्या अखेरपर्यंत साऱ्या जगातून गणितीयंत्रे किंवा 'ॲबॅकस' सारखी उपकरणे–बाद होऊ लागली होती आणि सगळीकडे भारतीय अंक-पद्धती, गणन-क्रिया वापरात येऊ लागल्या होत्या. सतराव्या शतकातील फ्रेंच प्रकांडपंडित गणिती पेरी लापनस (1749-1827) यालाही आश्चर्य वाटत होतं की, ग्रीस देशातील प्राचीन विद्वान-विद्वत्तेचे महासागर आर्किमिडीज आणि अपोलोनियस यांच्या नजरेतून ही अंकपद्धती कशी काय निसटली ? शून्याची कल्पना त्यांना कशी काय सुचली नाही ? जर त्याकाळीच त्यांना हे स्फुरलं असतं तर आज विज्ञान-तंत्रज्ञान आजच्यापेक्षाही कितीतरी पुढे गेलं असतं. पण ह्या झाल्या जर-तरच्या गोष्टी. शेवटी भारतीय शून्यानं आणि अंकांनी त्यांच्या क्षमतेची योग्य कल्पना युरोपियन विद्वानांना आणून दिली.

प्रसिद्ध पाश्चात्य इतिहासकार हूपर असं म्हणतात, ''अशा बऱ्याचशा गोष्टी आहेत की ज्यांसाठी संपूर्ण युरोप हा अरबांचा ऋणी राहील. त्यांनी अनेक औषधी आणि वैज्ञानिक पद्धतीचा विचार आम्हांला दिला. आणि सर्वात महत्त्वाचं म्हणजे मागासलेल्या अवस्थेतील युरोपियनांवर भारतासारख्या पौर्वात्य देशातील ज्ञानविज्ञानाचा प्रकाशझोत सोडून त्यांना जागं केलं. अरबांनी स्पेनमध्ये प्रथम ही भारतीय अंकपद्धती आणली. तिचा परिसस्पर्श होताच युरोपियनांनी विज्ञान आणि तंत्रज्ञानात घोडदौड सुरू केली.''

0 0 0

शून्याचा प्रवास 7

इ.स. 1543 मध्ये पोलंड देशातील खगोलविद् निकोलस कोपरनिकसने (1473-1543) असा सिद्धांत मांडला की, 'पृथ्वी आणि इतर ग्रह सूर्याभोवती लंबवर्तुळाकार कक्षेत फिरताहेत' त्याच्या या



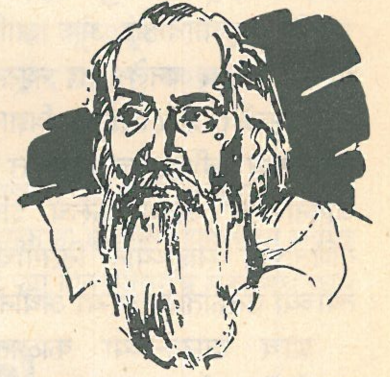
आकृती क्र. २१: कोपर्निकस

सिद्धांताने जनमानसात प्रचंड खळबळ उडवून दिली. कारण तोपर्यंत पृथ्वी स्थिर असून सूर्य आणि इतर ग्रह पृथ्वीभोवती फिरताहेत असा समज होता. पण कोपरनिकसने गणिताच्या आधारे निरीक्षण करून हा सिद्धांत मांडला होता. निरीक्षणांती जेव्हा त्याने वर्तविलेले अंदाज खरे ठरले तेव्हा त्याच्या सिद्धांताचा विजय झाला. त्याच्या या सिद्धांताने विज्ञानाला एक नवीनच दिशा दिली. कारण गणिताच्या साहाय्याने प्रथमच खगोलीय घटनांच्या मूलभूत सत्याचा शोध लागला होता. (खरं पाहता, दुसऱ्या शतकातच आर्यभटाने पृथ्वी गोल असून ती स्वतःच्या अक्षाभोवती फिरतेय असा सिद्धांत मांडला होता. हे ह्या पार्श्वभूमीवर भारतीय गणिताची झेप दाखवून देते.)

नंतर डेन्मार्कच्या जोहान्स केप्लरने (1571-1630) प्रत्येक ग्रहाची सूर्यापासूनच्या विशिष्ट अंतरावरील परिभ्रमण कक्षा गणिताच्या आधारे निश्चित केली; तर गॅलिलियो गॅलिली (1564-1642) यांनी पिसाच्या



आकृती क्र. २२ : केप्लर



आकृती क्र. २३ : गॅलिलियो

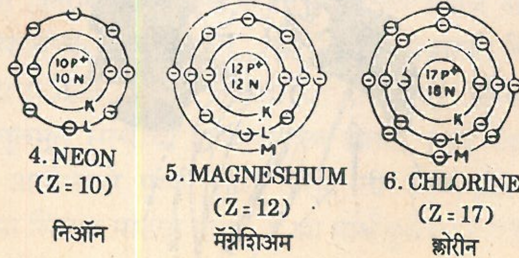
झुलत्या मनोऱ्यावरून दोन असमान वस्तुमानाच्या वस्तू खाली सोडल्या असता एकदमच जमिनीवर पडतात हे दाखवून गणित हे विज्ञानाच्या भरारीचे भक्कम पंख आहेत हे दाखवून दिले. आयझॅक न्यूटनने (1642-1727) गणिताने गुरुत्वाकर्षणाचा सिद्धांत मांडून खगोलशास्त्रात



आकृती क्र. २४ : न्यूटन

क्रांतीच घडवून आणली. कारण त्यामुळे केप्लरच्या गणितानं निश्चित केलेल्या ग्रहांच्या कक्षांना स्थायी स्वरूप तर मिळालंच; पण त्याचबरोबर नवीन ग्रहांच्या संशोधनालाही वाव मिळाला. याच खगोलगणिताचा परिणाम म्हणून नंतर युरेनस, नेपच्यून आणि प्लुटो हे ग्रह शोधले गेले. भारतीय शून्याधिष्ठित अंक आणि बीजगणिताची वाढ हे विज्ञानाच्या हातातील शस्त्र बनले; तर न्यूटनने त्यावरून शोधलेल्या कलनशास्त्रीय गणितामुळं (Calculas) विज्ञान गगनाला गवसणी घालू लागलं. (खरं तर विज्ञान पूर्वीपासूनच निसर्गात चराचरात भरलेलं आहे. त्याला माणूस जीवनापासून अलग करूच शकत नाही. पण जेव्हापासून माणूस गणिताच्या साहाय्यानं निसर्गाची भाषा समजू लागला, तेव्हापासून त्याच्या उत्क्रांतीला खऱ्या अर्थानं सुरुवात झाली.)

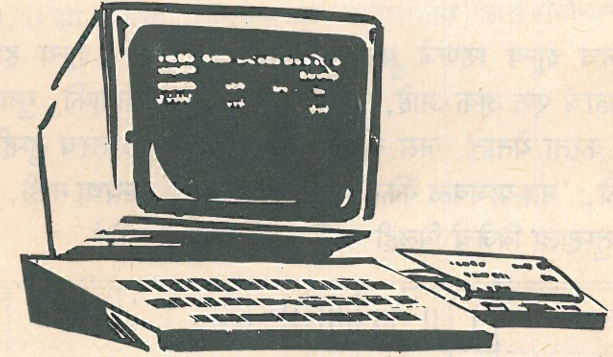
ह्याच दरम्यानच्या काळात शून्याला सर्वप्रकारच्या वैज्ञानिक घडामोडींत, मोजमापनात ध्रुव ताऱ्यासारखं अढळ स्थान प्राप्त होऊ लागलं होतं. शून्याचा संदर्भ घेतल्याशिवाय कुणाचंही पान हलत नव्हतं. कोणतंही उपकरण शून्याच्या आधाराशिवाय चालू शकत नव्हतं. एकोणिसाव्या शतकाच्या सुरुवातीला विद्युत ऊर्जेचा शोध लागल्यानंतर शून्य आणि त्याचे डावे-उजवे ऋण आणि धन अंक यांना एक वेगळंच महत्त्व प्राप्त झालं. धन आणि ऋण प्रभारांनी आज विद्युतशास्त्राची वाढ वीजकशास्त्रात (Electronics) करून पुढचा टप्पा गाठला आहे. विसाव्या शतकाच्या सुरुवातीला ऋणभारित इलेक्ट्रॉन आणि धनभारित



आकृती क्र. २५ : इलेक्ट्रॉन संरूपण

प्रोटॉन यांचा शोध लागल्यामुळे अणुयुगाची सुरुवात झाली. आणि आजच्या भौतिकशास्त्रात वस्तुमान असलेला आणि नसलेलाही पदार्थ यांचा जो ऊहापोह केला जातोय तोही शून्यावरच आधारित आहे. ही वस्तू आणि तिची विरुद्ध वस्तू यांचा जर संगम झालाच तर प्रचंड स्फोट होईल आणि सगळंच शून्यवत होऊन जाईल! ह्या शून्यातूनच विश्वाची निर्मिती झालीय की जिथे स्थलकालाच्या कल्पना बाद ठरतात. यातूनच शास्त्रज्ञांना विश्वस्फोटाची कल्पना स्फुरली.

भारतीय अंक आणि शून्यानं शास्त्रज्ञांना आधुनिक गणकयंत्र तयार करण्यासाठी उभारी दिली. आजचा संगणक हा ह्या संख्यापद्धतीचा सर्वोच्च आविष्कार आहे. संगणकात 0 आणि 1 ह्या दोन संख्याच महत्त्वाचं काम



आकृती क्र. २६

करतात. त्यांची मिळून एक वेगळीच भाषा तयार झालेली आहे. उदाहरणार्थ, संगणकात 2 म्हणजे 10, 3 म्हणजे 11, 16 म्हणजे 10000, 29 म्हणजे 11101

समाजशास्त्रातही शून्याचा प्रयोग नेहमी होतो. 'शून्याधिष्ठित अर्थसंकल्प', 'शून्याधिष्ठित लोकसंख्यावाढ' इत्यादी. पृथ्वी, तारे, ग्रहगोल, धूमकेतूपासून ते धूलिकणांपर्यंत सगळेच शून्याधिष्ठित आहेत. ही आहे शून्याची क्षमता आणि कमाल!

सरतेशेवटी 'शून्य' म्हणजे नेमकं आहे तरी काय? शून्यासारखी एखादी गोष्ट ह्या निसर्गात कुठंतरी अस्तित्वात आहे काय? नाही! अगदी अवकाशाचा जरी विचार केला तरी ते रिकामं नसतं. असंख्य सूक्ष्म, सूक्ष्मातीत कणांचं वास्तव्य तेथे असतं. वातावरणात तर हवाच असते. पोकळी अशी ती कुठे नाहीच; मग शून्य कुठाय? तर ते आहे माणसाच्या डोक्यात. त्याची संकल्पना ही माणसाच्या मेंदूची निर्मिती आहे. ही संकल्पना असली तरी ती एवढी भक्कम आहे की, अस्तित्वात असलेल्या कोणत्याही गोष्टीचा पाया हा ह्याच संकल्पनेवर आधारलेला आहे. म्हणूनच आज़चं विज्ञान आणि तंत्रज्ञान सूर्यमालेचा छेद घेऊन त्याच्याही पलीकडे झेपावू पाहात आहे. प्राचीन भारतीयांची अलौकिक बुद्धिमत्ता इथेच दिसून येते.

म्हणूनच शून्य म्हणजे काहीच नाही असं नाही. शून्य हा इतर अंकांसारखाच एक अंक आहे, की ज्याची बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार करता येतात. जसं बँकेत तुमचं खातं असेल तरच तुम्ही सांगू शकाल की, 'माझ्याजवळ बँकेत शून्य पैसे आहेत. अन्यथा नाही. त्याच हिशेबानं तुम्हाला विजेचं बिलही कधी कधी शून्य पैसे येतं.

इजिप्त	I	II	III	IIII	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	∩	[illegible]
बॅबिलॉन	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
जुने रोमन	I	II	III	IIII	V	VI	VII	VIII	IX	X	C
चिनी	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百
हिंदू	१	२	३	४	५	६	७	८	९	१०	१००
माया	•	••	•••	••••	—	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
अर्वाचीन	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100

आकृती क्र. २७): प्राचीन काळातील काही देशांमधील अंक लिहिण्याच्या पद्धती

थोडक्यात काय, तर शून्य हा एवढी प्रचंड क्षमता असलेला अंक आहे की, जो जगात आश्चर्ये घडवून आणू शकतो – नव्हे, आजतागायत घडवली आहेत आणि भविष्यातही घडवणार आहेच!

पण एक मात्र लक्षात ठेवायचं की, आज जे इंग्रजी अंक आपण पाहतो आहोत ते मूळचे रोमन नसून अरबांनी भारतीयांकडून युरोपमध्ये पोहोचवलेले भारतीय अंकच आहेत. म्हणजे युरोपातील इंग्रजी अंकांचं मूळ आणि विकास भारतीय ब्राह्मी लिपीतून झालेला दिसतो. असा इतिहास दगडादगडांमधील लेण्यांतून कोरलेला आपणांस आढळतो. पंधराव्या शतकात जेव्हा छपाईच्या शोधामुळे पुस्तकं छापली जाऊ लागली आणि अंकांचे टाइप तयार झाले/ पाडले गेले, तेव्हाच त्यांना आजचं स्थायी स्वरूप प्राप्त झालं. म्हणूनच 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 ह्या अंकांना 'भारतीय अंक आंतरराष्ट्रीय' असं संबोधतात.

0 0 0

शून्याचा प्रवास 8

बौद्धायन

काळ : ख्रिस्तपूर्व आठवे ते सातवे शतक.



आकृती क्र. २८): बौद्धायन

कार्य : आज पायथागोरसच्या सिद्धांताची जी मांडणी आपण करतो, ती मांडणी बौद्धायनाने त्याच्यापूर्वीच केली होती. कारण पायथागोरसचा काळ हा ख्रिस्तपूर्व तिसऱ्या शतकातील आहे. बौद्धायनाने या सिद्धांताला 'शुल्बसूत्र' असे संबोधलेले आहे. ते सूत्र असे – ''काटकोन त्रिकोणातील कर्णावर काढलेल्या चौरसाचे क्षेत्रफळ हे त्याच्या इतर दोन बाजूंवर काढलेल्या चौरसांच्या क्षेत्रफळांच्या बेरजेइतके असते.''

बौद्धायनाने लंबदुभाजक काढण्याची रीत, दिलेल्या आयताच्या क्षेत्रफळाएवढे क्षेत्रफळ असलेला चौरस तसेच समलंब चौकोन काढणे, चौरसाच्या क्षेत्रफळाइतकेच क्षेत्रफळ असलेले वर्तुळ काढणे, तसेच

2 ह्या करणी संख्येची किंमत काढणे, इत्यादी प्रकारचे कूटप्रश्न सोडवलेले आढळतात.

पायथागोरसची त्रिकूटे म्हणून प्रसिद्ध असलेल्या (3,4,5), (5,12,13) यांचा शोधही त्याने घेतलेला आढळतो.

चौरस कसा काढायचा याची कृती देऊन नंतर दोन चौरसांच्या वजाबाकीइतके क्षेत्रफळ असलेला चौरस कसा काढायचा याची रीतही बौद्धायनाने सांगितली.

आर्यभट

काळ : ख्रिस्ताब्द चौथे शतक (इ.स. 398)

कार्य : आर्यभटीय या ग्रंथाची निर्मिती केली. खगोलविज्ञानात निरीक्षणाची स्वत:ची अशी नवीन पद्धत शोधून काढली. ती म्हणजे पृथ्वी गोल आहे आणि ती स्वत:च्या आसाभोवती फिरते. तसेच चंद्रग्रहण हे पृथ्वीची छाया चंद्रावर पडल्यामुळे आणि सूर्यग्रहण हे चंद्राची पृथ्वीवर छाया पडल्याने होते हे सिद्ध केले. त्याचप्रमाणे चंद्र हा स्वयंप्रकाशी नसून तो सूर्याचा प्रकाश परावर्तित करतो हेही सप्रयोग करून दाखविले.

भूमितीतील π या स्थिरांकाचे मूल्य 3.1416 एवढे चार दशांशस्थळापर्यंत अचूकपणे काढून दाखविले. अंकगणितासाठी अक्षरपद्धती शोधली. आणि ग्रहणे, गणिताच्या साहाय्याने केव्हा व कशी होतात याविषयीची माहिती दिली. (आर्यभटाचे अरबी भाषेत 'अर्जमर' असे झालेले दिसते. त्यावरूनच 'अल्-जबर' हा शब्द अरबांनी तयार केला असावा. आणि त्याचे इंग्रजीत 'अलजिब्रा' असे झाले असावे, असे संशोधकांचे म्हणणे आहे.)

ब्रह्मगुप्त

काळ : ख्रिस्ताब्द सहावे शतक (इ.स. 598)

कार्य : ब्रह्मस्फुट सिद्धांताचा जनक. तसेच कारण खंडखाद्यक ह्या ग्रंथाचीही निर्मिती केली.

शून्याची देणगी देणारा महान गणिती म्हणून आज सारे जग ओळखते. बीजगणितात नवीन मांडणी केली. पृथ्वी गोल आहे हा सिद्धांत मांडला.

युडॉक्झस

काळ : ख्रिस्तपूर्व 408 ते 355 या कालावधीत होऊन गेला.

कार्य : याने 'करणी' संख्यांविषयीचा अभ्यास केला. वक्राची लांबी कशी काढावयाची ते शोधण्याचाही प्रयत्न केला.

पायथागोरस

काळ : ख्रिस्तपूर्व तिसऱ्या शतकात होऊन गेला.

कार्य : त्याने π या स्थिरांकाची किंमत 3.14 काढली. तसेच काटकोन त्रिकोणासंबंधीचे प्रमेय शोधून काढले. त्यासंबंधीच्या त्रिकूटांचाही शोध लावला.

युक्लिड

काळ : ख्रिस्तपूर्व 330 ते 275 या कालावधीत होऊन गेला. त्याने 'एलिमेंटस्' नावाचा ग्रंथ लिहून आधुनिक भूमितीशास्त्राचा पाया घातला. प्रतल भूमिती आणि अवकाश भूमितीबद्दल त्याने मूलभूत गृहीतके आणि कृत्ये मांडली. त्यांच्या एकूण प्रमेयांची संख्या 487 आहे. या सर्व प्रमेयांचा पाया फक्त 10 स्वयंसिद्ध विधानांवर म्हणजेच गृहीतकांवर आधारित आहे हे विशेष. आजची शालेय अभ्यासक्रमातील भूमिती ही युक्लिडचीच भूमिती आहे. भूमितीची तर्कशुद्ध आणि शास्त्रीय मांडणी पद्धतशीरपणे करणारा गणितज्ज्ञ म्हणून आजही ओळखला जातो.

अपोलोनियस

काळ : ख्रिस्तपूर्व 250 ते 200 या काळात होऊन गेला.

कार्य : याने शंकू, अन्वस्त, अपास्त या प्रकारच्या भूमितीचा पाया रचला. तसेच त्रिकोणाच्या बाजू आणि मध्यगा यासंबंधी सूत्र मांडले. ते आज 'अपोलोनियसचे प्रमेय' म्हणून ओळखले जाते.

आर्किमिडीज

काळ : ख्रिस्तपूर्व 287 ते 212 या काळात होऊन गेला.

कार्य : आधुनिक गणिताचा पाया यानेच घातला असे म्हटले जाते. वर्तुळाचे, अन्वस्ताच्या खंडाचे, गोलाच्या बाह्यांगाचे क्षेत्रफळ काढण्याच्या पद्धती शोधून काढल्या. त्रिकोण एका बाजूने फिरवून तयार



आकृती क्र. ३० : आर्किमिडीज

झालेल्या वक्रपृष्ठाचे क्षेत्रफळ, आयत एका बाजूने फिरवून तयार झालेल्या वृत्तचितीचे क्षेत्रफळ कसे काढावयाचे याविषयीच्या रीतीही शोधून काढल्या. त्याने कोनाचे तीन समान भाग कसे करायचे हेही गणिताने सिद्ध केले. वर्तुळाची स्पर्शिका ही वृत्तछेदिकेची अंतिम सीमा आहे असे मत त्याने मांडले.

रिने रेकार्त

काळ : याचा जन्म 31 मार्च 1596 साली फ्रान्समधील तूर्सजवळील 'ला हाय' या गावी झाला.

कार्य : याने सतराव्या शतकाच्या सुरुवातीला प्रत्येक वक्ररेषा ही लहान लहान सरळरेषांनी तयार होते असा सिद्धांत मांडून द्विमितीय आणि त्रिमितीय भूमितीचा पाया घातला. द्विमितीय अवकाशातील कोणताही वक्र किंवा त्रिमितीतील कोणतेही पृष्ठ बैजिक समीकरणात बंदिस्त करता येते हे दाखवून दिले. यावरूनच पुढे चौथी मिती असलेल्या अवकाशाची कल्पना साकार झाली आहे. हा गणिती तारा 11 फेब्रुवारी 1650 रोजी अस्तास पावला.

आयझॅक न्यूटन

काळ : 25 डिसेंबर 1642 या दिवशी या लोकोत्तर पुरुषाचा जन्म झाला.

कार्य : न्यूटनने गतिविषयक तीन नियम आणि गुरुत्वाकर्षणाचा नियम शोधून आधुनिक विज्ञानाचा पाया घातला. द्विदलघात प्रमेयाची (Binomial Theorem) सिद्धता दिली. अवकलन आणि समकलन (Differential and Integral Calculas) शास्त्राचा पाया

घातला. फलन (Function) म्हणजे काय हेही शोधून काढले. 'प्रिन्सिपिया' या ग्रंथाची निर्मिती केली. असा हा थोर शास्त्रज्ञ 20 मार्च 1727 रोजी कालवश झाला.

लायब्निझ

काळ : ख्रिस्ताब्द 1646 ते 1716 या कालावधीत होऊन गेला. त्यानेही न्यूटनप्रमाणे कलनशास्त्राचा शोध लावला. तसेच सांकेतिक तर्कशास्त्राचाही शोध लावला. यांचा मुख्य गुणधर्म म्हणजे तर्कशुद्धतेने बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, शून्य, एकरूपता याचा विचार करण्याची पद्धती. यातूनच त्याने त्याचे खास असे गणनयंत्र तयार केले.

ऑयलर

काळ : ख्रिस्ताब्द 1707 ते 1783 या काळात याने कामगिरी केली.
कार्य : याने असे दाखवले की, ग्रहांचे विवृत्तीय कक्षेपासून विचलन होते आहे आणि हे गणिताने काढता येते. गुरू किंवा शनीची कमी-जास्त वेगात होणारी हालचाल ठराविक वेळानंतर होते. तिला पर्यायकाळ आहे हेही त्याने गणिताने सिद्ध केले.

त्रिमितीय आकृत्यांचा पृष्ठभाग, कडा आणि शिरोबिंदू यांचा संबंध असणारे $F + V = E + 2$ हे सूत्र प्रसिद्ध केले. (येथे F म्हणजे पृष्ठभाग, V म्हणजे शिरोबिंदू आणि E म्हणजे कडा. उदा. पंचकोनी वृत्तचितीमध्ये $F = 7, V = 10, E = 15$ $F + V = E + 2$ हे सिद्ध होते.)

1774 मध्ये त्याने चलन-कलन शास्त्र (Calculas of Variation) या ग्रंथाची निर्मिती केली.

कलनशास्त्राचा उपयोग या मितीत कसा होतो हे त्याने सर्वप्रथम गणितज्ज्ञांना दाखवून दिले त्यामुळे गणिताचा चेहरामोहरा बदलण्यास तो कारणीभूत ठरला.

जोसेफ लाग्रांज

काळ : ख्रिस्ताब्द 1736 ते 1813 या कालावधीत हा गणिती होऊन गेला.

कार्य : त्याने 'बैजिक यामिकी' हा ग्रंथ लिहिला. चंद्राची एकच बाजू पृथ्वीवासीयांस का दिसते हा चंद्रदोलनाचा प्रश्न सोडविल्याबद्दल त्याला फ्रेंच वैज्ञानिक ॲकेडमीचे 1764 सालचे बक्षीस मिळाले.

संख्यात्मक समीकरणे आणि द्विघाताची अनिश्चित समीकरणे सोडविण्याच्या पद्धती याने शोधून काढल्या.

वजने आणि मापे यामध्ये दशमान पद्धतीचा वापर सुरू करणारा पहिला माणूस म्हणून तो आजही ओळखला जातो.

लाप्लास

काळ : ख्रिस्ताब्द 1749 ते 1827 या काळात हा फ्रेंच गणिती होऊन गेला.
कार्य : सूर्यकुलातील ग्रहांच्या गती, त्यांचे अन्योन्य आकर्षण आणि त्यामुळे सूर्यावर होणारे परिणाम याविषयीचा ऊहापोह लाप्लासने केला.

त्याने लिहिलेला 'खगोल गणितशास्त्र' हा ग्रंथ दोन खंडात 1799 साली प्रसिद्ध झाला.

गाऊस

काळ : ख्रिस्ताब्द 1777 ते 1855 या काळातील हा गणिती होता.
कार्य : अयुक्लिडीय भूमितीचा पाया घालण्याचे काम याने केले.

एका बिंदूतून कोणत्याही रेषेला एकापेक्षा जास्त समांतर रेषा काढता येतील हे गृहीतक धरून त्याने नवीन भूमितीची सुरुवात केली.

लोबोशोवस्की

काळ : ख्रिस्ताब्द 1793 ते 1856 ह्या गणितज्ज्ञाने अयुक्लिडीय भूमितीचा शोध लावला. या नवीन भूमितीचा जनक असे याला मानले जाते.

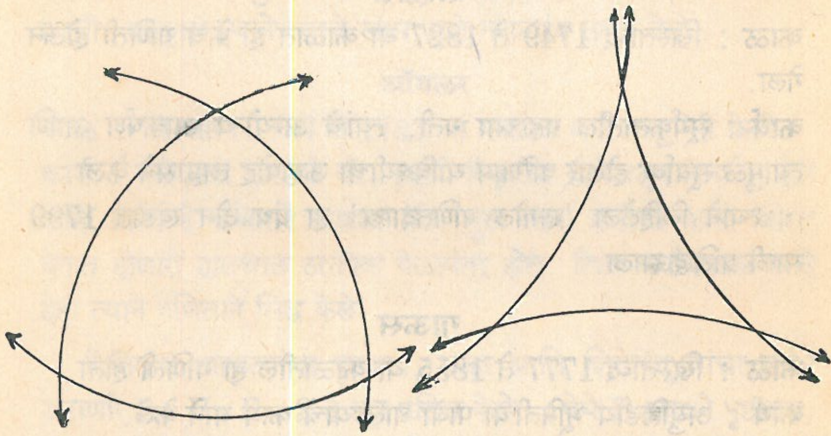
समांतर रेषाविषयीचे पूर्वीच्या युक्लिडीय भूमितीतील गृहीतक बदलून व्यापक पायावर जी नवीन भूमिती स्थापण्यात आली तिला बोल्याई लोबोशोवस्कीची भूमिती असे ओळखले जाते. या भूमितीमुळे अवकाशीय गणिताची वाढ झपाट्याने झाली. या भूमितीला 'अपास्तीय भूमिती'

असेही म्हणतात. यात सरळ रेषा ही अमर्याद नसून मर्यादित आहे हे गृहीतक विचारात घेण्यात आलेले आहे.

रिमान

काळ : ख्रिस्ताब्द 1826 ते 1866 या काळात हा जर्मन गणिती होऊन गेला.

कार्य : त्याने समान द्विमितीय अवकाशाचे एक विश्व आहे अशी कल्पना करून ते पृथ्वीसारख्या गोलावर वसले आहे आणि येथे सरळ रेषा म्हणजे गोलाचे विशाल वर्तुळ अशी व्याख्या तयार केली. यावरून कोणत्याही



येथे त्रिकोणाच्या तीन कोनांची बेरीज १८०° पेक्षा जास्त भरते.

येथे त्रिकोणाच्या तीन कोनांची बेरीज १८०° पेक्षा कमी भरते.

दोन रेषा एकमेकींना छेदणारच; म्हणजे दिलेल्या रेषेला समांतर रेषा काढता येणे अशक्य असे गृहीतक तयार केले.

येथे सरळ रेषा ही वक्र असल्यामुळे गंमत अशी होते की युक्लिडच्या भूमितीतील 'त्रिकोणाच्या तीन कोनांची बेरीज 180^0 असते' हे प्रमेयच कोसळते. कारण रिमानच्या या भूमितीत त्रिकोणाच्या तीन कोनांची बेरीज कधी 180^0 पेक्षा जास्त, तर कधी 180^0 पेक्षा कमीही भरू शकते.

0 0 0

जगातील काही महत्त्वाच्या अंकलेखनपद्धती

आधुनिक मराठी	ईजिप्त हायरोग्लिफिक	ईजिप्त हिअरेटिक	बॅबिलोनिया	ग्रीक ॲटिक	ग्रीक आयोनियन	चिनी दंड	चिनी चिन्हांकित	रोमन	हिब्रू	माया	अरबी अक्षरांकित	अरबी गुबार	अरबी आधुनिक	आधुनिक पाश्चिमात्य
६०	𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆	[illegible]	[illegible]	𐅄Δ	Ξ	𝍮	六十	LX	ס	[illegible]	س	[illegible]	٦٠	60
७०	𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆	[illegible]	[illegible]	𐅄ΔΔ	Ο	𝍯	七十	LXX	ע	[illegible]	ع	[illegible]	٧٠	70
८०	𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆	[illegible]	[illegible]	𐅄ΔΔΔ	Π	𝍰	八十	LXXX	פ	[illegible]	ف	[illegible]	٨٠	80
९०	𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆	[illegible]	[illegible]	𐅄ΔΔΔΔ	Ϙ	𝍱	九十	XC	צ	[illegible]	ص	90	٩٠	90
१००	𓍢	[illegible]	[illegible]	Η	Ρ	𝍠	百	C	ק	[illegible]	ق	100	١٠٠	100
२००	𓍢𓍢	[illegible]	[illegible]	ΗΗ	Σ	𝍡	二百	CC	ר	[illegible]	ر	[illegible]	٢٠٠	200
३००	𓍢𓍢𓍢	[illegible]	[illegible]	ΗΗΗ	Τ	𝍢	三百	CCC	ש	[illegible]	ش	[illegible]	٣٠٠	300
४००	𓍢𓍢𓍢𓍢	[illegible]	[illegible]	ΗΗΗΗ	Υ	𝍣	四百	CD	ת	[illegible]	ت	[illegible]	٤٠٠	400
५००	𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢	[illegible]	[illegible]	𐅅	Φ	𝍤	五百	D	ך	[illegible]	ث	[illegible]	٥٠٠	500
६००	𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢	[illegible]	[illegible]	𐅅Η	Χ	𝍥	六百	DC	ם	[illegible]	خ	[illegible]	٦٠٠	600
७००	𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢	[illegible]	[illegible]	𐅅ΗΗ	Ψ	𝍦	七百	DCC	ן	[illegible]	ذ	[illegible]	٧٠٠	700
८००	𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢	[illegible]	[illegible]	𐅅ΗΗΗ	Ω	𝍧	八百	DCCC	ף	[illegible]	ض	[illegible]	٨٠٠	800
९००	𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢	[illegible]	[illegible]	𐅅ΗΗΗΗ	Λ	𝍨	九百	CM	ץ	[illegible]	ظ	900	٩٠٠	900
१०००	𓆼	[illegible]	[illegible]	Χ			千	M				1000	١٠٠٠	1000